Prävention von Rechenschwierigkeiten

Präambel

> „Es müssen viele Zeitalter vergangen sein, bis man erkannt hat, dass ein Paar Fasane wie zwei Tage Beispiele für die Zahl zwei sind“ (Bertrand A.W. Russell zit. nach Wehrmann 2003).

Ausgehend von Mathematik als Etwas, das nicht wahrnehmbar, nicht fassbar ist, basiert das Begreifen von mathematischen Zusammenhängen auf dem Arbeiten mit Darstellungen z. B. Bildern, Handlungen, sprachlichen oder mathematischen Symbolen.
Diese von der Mathematik benötigten Darstellungen sind allerdings oft mehrdeutig und vielseitig interpretierbar, da sie auf Konventionen beruhen. So sagen die Zahlsymbole beispielsweise noch nichts über die Zahlen selbst aus. Indische Ziffern, genauso wie die von uns genutzten arabischen Ziffern, sind Konventionen und müssen erst gelernt werden. Mathematik lernen heißt dann, die Konventionen zu verstehen und mit Hilfe der Darstellungen bestimmte Vorstellung zu dem mathematischen Objekt aufzubauen. Das mathematische Objekt „8“ wird so nicht nur als Ziffer, sondern als 8 Gegenstände, 8 Punkte etc. aufgefasst.

Der Erwerb mathematischer Vorstellungen geschieht über verinnerlichte konkrete Handlungen. Mit „konkreten Handlungen“ sind allerdings nicht die äußerlich sichtbaren Handlungen, wie das konkrete Manipulieren mit Material, sondern die geistige Handlung bzw. Aktivität gemeint (vgl. Gerster und Schultz, 2000).

Da die Ursachen von Rechenschwierigkeiten z.B. häufig in genetischen oder affektiven Dispositionen oder einem schwierigen Umfeld gesucht werden und weniger im mathematischen Inhalt selbst. Sätze wie „Wieso verstehst du das denn nicht, das ist doch ganz logisch“ „das musst du doch schaffen, streng dich an, schau genau hin...“, als Hilfen gedacht, sind nicht nur pädagogisch wenig hilfreich und zeigen auch, dass die Schwierigkeiten des Faches nicht verstanden wurden.

Forschungsfeld „besondere Schwierigkeiten beim Rechnen“ – Problem der Begrifflichkeiten

Es gibt eine Fülle von Begriffen, die im Zusammenhang mit Schwierigkeiten beim Rechnen zu hören sind: Dyskalkulie, Arithmasthenie, Rechenstörung, Rechenschwäche, Zahlendyslexie und viele weitere (siehe Auflistung in Lorenz, Radatz 1993).
Die Problematik liegt nicht nur in den unterschiedlichen Begrifflichkeiten, sondern auch in den unterschiedlichen Wissenschaftsdisziplinen, die diese Begriffe geprägt haben, wie Medizin, Neuropsychologie, Psychologie, Pädagogik, Fachdidaktik. Diese Disziplinen teilen zumeist auch keinen gemeinsamen Forschungsansatz, welches eine Begriffsdefinition noch schwieriger macht.
Wie Gerster und Schulz (2000) betonen, kann beispielsweise die Neuropsychologie nur begrenzt Hilfen oder Erklärungen zu diesem Thema anbieten: *„Mathematische Kognitionen haben eine eigene psychologische Natur und werden durch besondere mentale Bearbeitung sensomotorischer Erfahrungen hervorgebracht. Das neuropsychologische Wissen kann nur mit Bezug auf diese Besonderheiten für das Verständnis der Lernschwierigkeiten und für ihre Vermeidung und Behebung fruchtbar gemacht werden.“*(Gerster& Schultz, S.8)

2011 © by PIK AS (http://www.pikas.uni-dortmund.de/

Wie oben erwähnt sind sensomotorische Erfahrungen allerdings nicht gleichzusetzen mit mathematischen Vorstellungen. Es werden nicht automatisch durch sinnliche Erfahrungen entsprechende „adäquate“ Vorstellungen aufgebaut. Die mentalen Prozesse dabei spielen eine wichtige Rolle und diese sind eben mathematikspezifisch.
Die oft angegebenen neuropsychologischen Schwierigkeiten von rechenschwachen Kindern, wie Wahrnehmungsstörungen (z.B. Figur-Grund-Wahrnehmung) stehen nicht unbedingt in einem kausalen Zusammenhang zu einer Rechenschwäche. Deren Vorhandensein als Ursache von Rechenschwierigkeiten anzunehmen, kann weder belegt noch widerlegt werden. Wie Gerster und Schultz (2000) schreiben, kennen die Autoren aus der neuropsychologischen Forschung zwar Aufgaben zur Untersuchung dieser Wahrnehmungsfunktionen, die Beziehung zur Entwicklung des mathematischen Verständnisses ist allerdings unklar.

Schwierigkeiten in der visuellen Wahrnehmung können allgemein hinderlich sein, da der Unterricht in fast allen Fächern audiovisuell angelegt ist. Das Sehen, Verstehen und Deuten von bildlichen Darstellungen spielt allerdings besonders im Mathematikunterricht eine große Rolle (siehe oben). Daher sollte auf die Prämisse „weniger ist mehr“ bei bildlichen Darstellungen und Arbeitsmitteln zurückgegriffen werden (vgl. auch Wittmann 1993).

Allerdings ist in der gesamten Forschung zu Rechenschwierigkeiten eine allgemeine Problematik der Abgrenzung von Phänomenen und Ursachenerkennbar!
Dagegen wird hier eine Sichtweise auf Schwierigkeiten beim Rechnen eingenommen, die von kognitiven Prozessen beim Mathematiklernen ausgeht:
„Will man Lernschwierigkeiten in Mathematik abhelfen, muss man vor allem Experte/Expertin für Lernprozesse in Mathematik und für die Erforschung des individuellen Gebäudes der Mathematik werden, das ein Kind bisher entwickelt hat. Dafür benötigt man zuerst mathematisch-psychologische Konzepte, nicht neuropsychologische.“ (Gerster Schulz 2000, S.8)
Diese Annahme wird auch hier vertreten: Ausgehend von einer **fachbezogenen Perspektive**, die zunächst grundsätzlich nach Schwierigkeiten beim Erlernen von Mathematik sucht.
Rechenschwierigkeiten werden demnach verstanden als Schwierigkeiten beim Rechnenlernen und <u>nicht</u> als „Störung“ (oder Krankheit) beim Kind. Damit bezieht sich Rechenschwäche auf nicht gelungene Lern- aber auch Vermittlungsprozesse im Mathematikunterricht. Fehler sind somit zurückzuführen auf ein Nichtverstehen und nicht auf einen Mangel an Übung oder Willen (vgl. Gaidoschik 2010, Meyerhöfer 2008)
Diese Definition setzt zudem an einem kompetenzorientierten Verständnis des Kindes von Mathematik an.
In diesem Sinne wird hier Prävention von Rechenschwierigkeiten verstanden als das Herstellen von Verstehen, das Gestalten von Lernprozessen ohne Brüche. Dieses zunächst einfach klingende Ziel, ist eine anspruchsvolle Aufgabe.

Eine inhaltliche Auseinandersetzung mit dem Rechnen und Denken von Kindern:

- Wo steht das Kind (an welcher Stelle des Lernprozesses)?
- Welches sind die nächsten Lernschritte?
- Wie kann ich es an dieser Stelle unterstützen?

Im Folgenden wird das Herstellen von Verstehen bei den elementaren mathematischen Inhalten Zahlen und Operationen am Bsp. der Subtraktion vorgestellt. Das Verstehen dieser beiden Inhalte ist gleichzeitig Voraussetzung für das Ablösen vom zählenden Rechnen, welches immer wieder als Hauptsymptom (vgl. u.a. Schipper 2005) von Rechenschwierigkeiten genannt wird.

2011 © by PIK AS (http://www.pikas.uni-dortmund.de/

Zählendes Rechnen

Der Begriff „zählendes Rechnen“ an sich, ist wie Gaidoschik (2008) sagt, eigentlich ein Widerspruch, da Rechnen eine nicht mehr zählende Vorgehensweise beschreibt.

Hauptbereich dieser Schwierigkeiten ist sicherlich das verfestigte zählende Rechnen im Bereich der additiven Grundaufgaben: Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 20.
Diese Aufgaben nicht durch auswendig gewusste Aufgaben oder abgeleitete Aufgaben, sondern durch Zählstrategien zu lösen, behindert das Rechnen und mathematisches Lernen im Allgemeinen (Gerster, Gaidoschik). Es erschwert eine Einsicht in Zahlbeziehungen, in das Stellenwertsystem und in den Zahlenraum.

Das Zählen ist vor und zu Beginn des 1. Schuljahrs eine wichtige Strategie und völlig normal. Alle Kinder sind zunächst zählende Rechner. Die Frage ist allerdings, warum es manche Kinder bleiben. Das zählende Rechnen sollte als Ausgangspunkt gelten, als Anknüpfung an die Vorerfahrungen der Kinder, aber im Verlauf des ersten Schuljahres sollte elaborierten Strategien weichen. Passiert dies nicht, so spricht man vom verfestigten zählenden Rechnen. Der genaue Zeitpunkt wird von keinen Autoren genannt. Gaidoschik (2010) untersuchte in Österreich Kinder im Verlauf des 1. Schuljahres. Die meisten rechneten auch am Ende noch zählend (s. dazu Haus 3 – IM – Gaidoschik: „Zur Entwicklung von Rechenstrategien im 1. Schuljahr“).

Voraussetzung für ein nicht-zählendes Vorgehen ist ein umfassender Zahlbegriff, das Verständnis in Beziehungen zwischen Zahlen sowie ein darauf aufbauendes Verständnis von Addition und Subtraktion (Operationsverständnis).

2011 © by PIK AS (http://www.pikas.uni-dortmund.de/

Zahlen

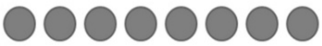
Bedeutung von Zahlen und Beziehungen zwischen Zahlen

> *„Ein mathematisches Konzept wie eine Zahl (…) oder eine Funktion (beispielsweise y = x + 1) verstehen lernen heißt, ein reichhaltiges Geflecht von Beziehungen herzustellen zwischen verschiedenen Darstellungen, Vorstellungen und Anwendungssituationen…“*
>
> (Gerster &Schultz 2000, S. 33)

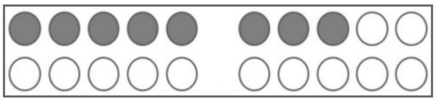
Wird dieses „Geflecht“ von Beziehungen nicht hergestellt, kann bei einem Kind auch kein Zahlverständnis aufgebaut werden, die Welche Vorstellungen Kinder zu einer Zahl aufbauen sollten und welche Darstellungen dabei helfen können, damit es ein **tragfähiger** Begriff ist, wird im Folgenden dargestellt:

Verschiedene Vorstellungen zur Zahl „8“ verbunden mit verschiedenen Darstellungen

- 8 Plättchen, 8 Stifte, …



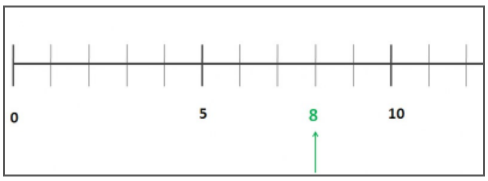
- 8 Plättchen auf dem Zwanzigerfeld



- Zahlwort: acht

- Zahlwortreihe: 1,2,3,4,5,6,7,8,…
  oder: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, …

- 8 auf dem Zahlenstrahl



- doppelte von vier
- 8 als Nachfolger von 7, als Vorgänger von 9, 8= 4+4, 8=5+3, 8= 6+2, 8= 10-2

Diese verschiedenen Vorstellungen zu Zahlen[1] sollen hier – anders als in vielen mathematikdidaktischen Texten – nicht gleichberechtigt nebeneinandergestellt, sondern hierarchisiert werden.

[1] Man findet diese oft allgemeiner als Zahlaspekte (kardinal, ordinal, Maßzahl, Rechenzahl, Kodierung) benannt.

2011 © by PIK AS (http://www.pikas.uni-dortmund.de/

(In der Grundschularithmetik sind unserer Ansicht nach insbesondere eine kardinale und ordinale Vorstellung entscheidend und sollten vertieft werden, sofern man die Maßzahlvorstellung ebenfalls als Aspekt einer kardinalen Vorstellung betrachtet, mit dem Unterschied, dass Maße quantifiziert werden.)

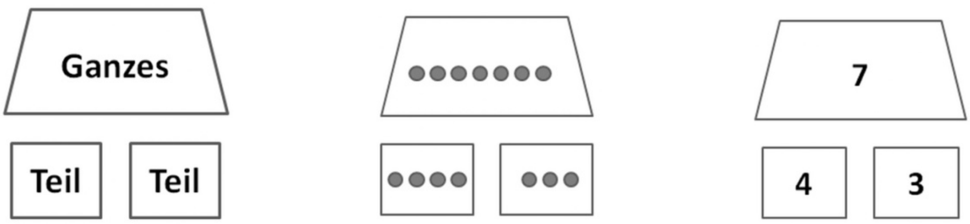
Beziehungen zwischen Zahlen

In der fachdidaktischen Literatur wird die Beziehung zwischen Zahlen zum einen als Teile-Ganzes-Konzept (oder Teil-Teil-Ganzes) bzw. der Teile-Ganzes-Beziehung (Resnick 1983) bezeichnet, andererseits liest man auch von der Relationalzahl (Stern1998). Unsere Annahme ist, dass beide Bezeichnungen im Grunde dasselbe meinen – nämlich Beziehungen zwischen Zahlen zu verstehen.

Um Beziehungen zwischen Zahlen darzustellen (bzw. sich vorzustellen), braucht man eine kardinale Sicht auf Zahlen: Mengen werden in Beziehung zueinander gesetzt.

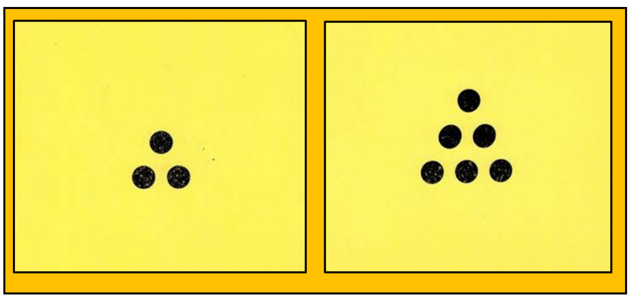
Teile- Ganzes Beziehung: **Zahlen zerlegen**

Damit ist die Einsicht gemeint, dass Zahlen zerlegbar und aus Teilen zusammensetzbar sind. Zahlen als Teile in einem Ganzen zu verstehen ist eine entscheidende und elementare Leistung in den ersten Schuljahren (*„major conceptual achievement of the early school years“* Resnick 1983). Es ist zu beachten, dass Kinder Unterschiede oder Beziehungen zwischen Mengen zunächst nur mit Mengen selbst und noch nicht mit Zahlsymbolen ausdrücken können (vgl. Resnick 1992).



Die Zahl 7 ist z.B. zerlegbar in 4 und 3.

Relationalzahlbegriff: An**zahlen vergleichen**



Anzahlen unterschiedlicher Mengen lassen sich vergleichen. Dabei lassen sich sogenannte Differenzmengen bestimmen: Bezogen auf die Mengendarstellungen links, heißt das: „Im linken Muster sind **drei** Punkte weniger als im rechten bzw. im rechten Muster sind **drei** Punkte mehr als im linken“.

Ein tragfähiger Zahlbegriff bzw. tragfähige Vorstellungen zu Zahlen aufzubauen ist die Grundlage für das Rechnen und die Entwicklung von Rechenstrategien. Eine aspektreiche Vorstellung zu Zahlen ist dementsprechend eine Voraussetzung für ein tragfähiges Operationsverständnis sowie ein Stellenwertverständnis, welches wiederum wie bereits oben angesprochen die Ablösung vom zählenden Rechnen unterstützt bzw. bewirkt.

Nur wer zwischen Zahlen Beziehungen herstellen kann, kann auch Rechenoperationen verstehen. Die Beschreibung der Beziehung „im linken Muster sind **drei** Punkte weniger als im

2011 © by PIK AS (http://www.pikas.uni-dortmund.de/

rechten“, kann subtraktiv als Operation „6 – 3 = 3“ verstanden werden, sowie die Beschreibung „im rechten Muster sind **drei** Punkte mehr als im linken“ additiv als„3 + **3** = 6“ gedeutet werden kann. Ohne die Kenntnis von der Zerlegbarkeit der Zahlen und einer umfassender Zahlvorstellung sind mathematische Operationen und ihre Eigenschaftenim allgemein nicht verständig durchführbar.

Werden Kinder dazu angeregt, Beziehungen zwischen Zahlen zu erforschen, so erweitert dies die Zahlvorstellung sowie das Operationsverständnis. Auf diese Weise und nur so lassen sich elegantere Rechenstrategien entwickeln, bei denen es notwendig ist, Summanden oder Subtrahenden zu zerlegen, um einfacher und schneller zum Ergebnis zu kommen.

Beispiel für die Addition: 7 + 8 = 7 + (3 + 5) oder

= 7 + (7 + 1).

Beispiel für die Subtraktion: 14 – 6 = 14 – (4 + 2) = 14 – 4 – 2 oder

_____= 14 – (7 – 1) = 14 – 7 + 1

Für den arithmetischen Anfangsunterricht bedeutet das, dass den Kindern Gelegenheit gegeben wird, Beziehung zwischen Zahlen zu erforschen:

- Vom Ganzen ausgehend, dieses zerlegen, Teile benennen und wieder zusammenführen: beide Teile zusammen ergeben das Ganze:
    - Eine Teilmenge aus einer Menge abschneiden,
    - eine Schokolade auseinanderbrechen und wieder zusammensetzen
    - …

> **Reversibilität:** Die Zerlegung einer Menge in zwei Teilmengen ändert nichts an der Gesamtmenge.
>
> **Wichtiger Hinweis:** Einige Kinder sehen beim Zerlegen nur noch die Teilmengen und verlieren dabei das Ganze aus den Augen. Daraus können später z.B. Schwierigkeiten im Umgang mit Subtraktionsaufgaben resultieren, wenn aus bildlichen Darstellungen beliebige Teile voneinander abgezogen werden, das Ganze aber nicht gesehen wird.

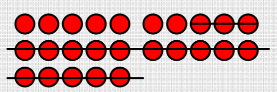
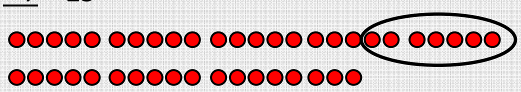
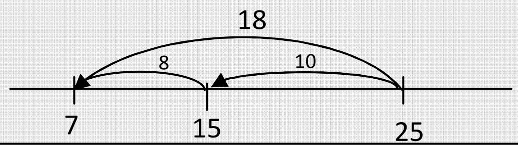
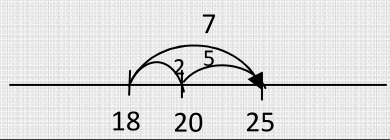
Es sollte darauf geachtet werden, dass die Übungen sprachbegleitend durchgeführt werden. Dabei ist auch zu beachten, dass der Begriff „zerlegen“ nicht dem herkömmlichen, alltäglichen Sprachgebrauch entspricht. Im Sinne eines Verstehens gehört auch ein Sprachverständnis dazu (s. dazu Haus 4). Kinder können Aufgabe oft nicht korrekt lösen, weil ihnen die Aufgabenstellung oder einzelne Worte nicht klar sind.

Operationsverständnis:

Bedeutung und Eigenschaften - am Beispiel der Subtraktion

In den meisten Schulbüchern wird die Subtraktion mit der Vorstellung der Restmenge eingeführt: Bei bildlichen Darstellungen fliegen Vögel weg, es werden Kerzen ausgepustet, Äpfel werden gegessen usw. Das **Ergebnis** ist das, was übrig bleibt, also der **Rest**. Diese abziehenden/wegnehmenden Situationen illustrieren aber nur *eine* Grundvorstellung, die zur Subtraktion aufgebaut werden sollte. Ebenso wichtig ist es, dass die Kinder das **Ergebnis** als **Unterschied** interpretieren und damit eine weitere Grundvorstellung zur Subtraktion aufbauen (vgl. auch Marx& Wessel 2010). Beide Grundvorstellungen sind wichtig für den weiteren Lernprozess der Kinder.

Sie bilden z.B. die Basis für die Entwicklung von Rechenstrategien…

Differenz als Rest	**Differenz als Unterschied**
25 - 18	
z.B. schrittweises Abziehen: 25 – 10= 15 15 – 8 = 7	z.B. schrittweises Ergänzen: 18 + __ = 25 18 + 2 = 20 20 + 5 = 25 18 + 7 = 25
	
	

… und sind wichtig für das Verständnis der schriftlichen Subtraktion.

Berechnen der Differenz durch **Abziehen**		Berechnen der Differenz durch **Ergänzen**
X	**Entbündeln** 4 10 ~~5~~ ~~2~~6 − 283 = 243	x
x	**Gleichsinniges Verändern** 5 10 2 6 − 2 1 8 3 = 243	x
	Auffüllen 526 − 2 1 8 3 = 243	x

Eine Möglichkeit zur Förderung der Vorstellung der Differenz als Unterschied ist beispielsweise das Spiel „Hamstern“ (siehe Haus 6 – UM – Arithmetikunterricht in der Schuleingangsphase).

Automatisieren – richtig üben

Darunter wird hier das automatische, schnelle Abrufenkönnen von Additions- und Subtraktions- Aufgaben im 20er Raum verstanden. Zunächst muss eine Basis für das Verständnis der Zahlen und Rechenoperation geschaffen werden (Grundlegungsphase). Erst wenn dieses grundgelegt ist, macht es Sinn zur Automatisierungsphase überzugehen und es kann systematisch geübt werden (Automatisierungsphase). Hier sollen die Kinder die entsprechenden, verstandenen Aufgaben im Kopf lösen und die Schnelligkeit ihrer Antworten allmählich steigern. Die Automatisierung der Aufgaben ist unerlässlich für den weiteren Lernprozess.

Für das gezielte Automatisieren hat sich das Arbeiten mit 1+1 Kartei (welche in Haus 3 UM zu finden ist, zum Aufbau der Kartei siehe auch IM) bewährt.

Auch das Blitzrechnen aus dem Projekt mathe 2000, welches in das Zahlenbuch integriert, aber auch als externe Kartei vorhanden ist, hilft bei der Automatisierungsphase. Durchgehend betont werden dabei eine strukturierte Zahlerfassung (insbesondere die „Kraft der Fünf“) und ein breites Operationsverständnis. Die Blitzrechenplakate, die sich ebenfalls im UM zu Haus 3 befinden, können begleitend im Unterricht eingesetzt werden.

Zusammenfassung

> *„Rechenschwache Kinder sind schwach im Rechnen, weil sie es (noch) nicht besser gelernt haben“*
>
> Gaidoschik (2003)

Grundsätzlich erwerben aber auch diese Kinder mathematisches Wissen nicht anders als andere Kinder. Der einzige Unterschied ist die benötigte Zeit. Natürlich sollte auf diese besondere Bedingungen reagiert werden, aber nicht über Reduktion und/ oder Isolation von Inhalten. Es ist ein Trugschluss, davon auszugehen, dass das Nachvollziehen von Rechenschritten gerade für leistungsschwache Kinder eine Überforderung darstellt. Die Einsicht in Beziehungen zwischen Zahlen und Beziehungen zwischen Aufgaben entlastet die Kinder auf lange Sicht gesehen.

Für alle Kinder ist es notwendig, tragfähige Vorstellungen von Zahlen, Aufgaben und Beziehungen zwischen diesen aufbauen zu können bevor automatisiert wird. Nur so kann Rechenschwierigkeiten vorgebeugt werden. Die Prävention von Rechenschwierigkeiten ist somit vor allem eine Aufgabe der ersten beiden Schuljahre.

2011 © by PIK AS (http://www.pikas.uni-dortmund.de/

Literatur

Gerster, Hans-Dieter; Schultz, Rita (2000): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Pädagogische Hochschule Freiburg. (420 Seiten) Download: www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397/ (4.11.2011)

Gaidoschik, Michael (2003): Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern. Persen. 5. Auflage 2010

Gaidoschik, Michael (2010): Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundsufgaben im Laufe des 1. Schuljahres.

Lorenz, Jens-Holger/Radatz, Hendrik (1993). Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover. Schroedel.

Marx, Andreas.; Wessel, Jan. (2010): Die Entwicklung des Operationsverständnisses bei der Subtraktion. In: Mathematik Grundschule, H. 25, S. 40 . 43.

Meyerhöfer, Wofram (2008): Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nichtbearbeiteten stofflicher Hürden. In: Beiträge zum Mathematikunterricht.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking (pp. 109-151). New York: Academic Press.

Schipper, Wilhelm. (2005). Übungen zur Prävention von Rechenstörungen. In: Die Grundschulzeitschrift, Heft 182, Karteikarten 1-16. Seelze. Erhard Friedrich Verlag.

Stern, Elsbeth. Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter. Lengerich: Papst Science Publisher, 1998

Wehrmann, Michael (2003): Qualitative Diagnostik von Rechenschwierigkeiten im Grundlagenbereich Arithmetik. Verlag Dr. Köster: Berlin.

Wittmann, Erich Ch. (1993): ‚Weniger ist mehr': Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: K. P. Müller (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, S. 394-397.

Wittmann, Erich, Ch. (2001): Ein alternativer Ansatz zur Förderung „rechenschwacher" Kinder.
Download: www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/mathe2000/pdf/foerderansatz.pdf (4.11.2011)