Zunehmende Mathematisierung – das Ich-Du-Wir-Prinzip

Erste Fahrstunden

Erinnern Sie sich daran, wie Sie das Autofahren erlernt haben? Können Sie sich vorstellen, Ihre Fahrstunden wären nach folgendem Ausbildungsplan abgelaufen?

- 1. Stunde: Ein- und Aussteigen üben, zuerst ohne, dann mit Tür öffnen und schließen; relevante Bestandteile (Lenkrad, Gaspedal, Bremse etc.) kennenlernen
- 2. Stunde: Zunächst umdrehen des Zündschlüssels, dann Üben des vorsichtigen Tretens des Gaspedals; schließlich Koordination dieser beiden Aktivitäten, mit dem Ziel, den Motor anzulassen; einprägende Wiederholung der wichtigsten Bestandteile eines Autos
- 3. Stunde: Wiederholung des Ein- und Aussteigens mit Türbetätigung sowie des Anlassens des Motors; Üben des Geradeausfahrens (nicht schneller als 15 km/h) und Bremsens
- 4. Stunde: Erlernen des Einsatzes des linken Außenspiegels sowie des 'Über die linke Schulter-Guckens', zunächst im Stehen, später im Fahren (nicht schneller als 15km) Übung des Einschlagens des Lenkrades nach links sowie des Zurückschlagens in die Ausgangsstellung.
- 5. Stunde: Wiederholung aller bisherigen Lernschritte, Übertragung auf das Fahren von Rechtskurven
- 6. Stunde: Übung des Geradeausfahrens, dann des Links- und schließlich des Rechtskurven-Fahrens sowie des Bremsens – Höchstgeschwindigkeit 30 km/h.
- 7. Stunde: Wiederholung; Neuerwerb der Fähigkeit, den Rechts- und den Linksblinker zu betätigen
- 8. Stunde: …

Prinzip der zunehmenden Komplizierung

Es ist nicht erforderlich, dieses Gedankenexperiment weiter fortzuführen. Autofahren ist eine komplexe Tätigkeit, die sich aus einer Vielzahl von Teilkompetenzen zusammensetzt, die man nicht Schritt für Schritt in sinnleeren Laborsituationen erlernt. Mathematikunterricht läuft aber nicht selten genauso ab, wie es dieses fiktive Beispiel andeutet. Es wird angenommen, dass das Erlernen von Mathematik ein streng gestufter, linearer Prozess ist. Aufgabe der Lehrer ist es gemäß dieser Sichtweise, den Stoff Schritt für Schritt zu vermitteln. Bei der Einführung der schriftlichen Multiplikation beispielsweise würde man in etwa so vorgehen:

1. Lernschritt: Gemischte Zehner mit reinen Zehnern (10 als Multiplikator, z. B. 10·43, von Anfang an jeweils mit detaillierten Vorgaben zu Rechenweg und Schreibweise)
2. Lernschritt: Beliebige Zehnerzahl als Multiplikator (z. B. 30·26)
3. Lernschritt: Multiplikation gemischter Hunderter/Zehner mit Einern (z. B. 3·280)
4. Lernschritt: Multiplikation gemischter Hunderter/Zehner/Einer mit Einern (z. B. 3·294)

   usw.

Treffers (1983) hat diese Sichtweise einmal als ‚*fortschreitende Komplizierung*' bezeichnet und diesen Ansatz wie folgt charakterisiert:

- Sorgfältige Stufung & Isolierung der Schwierigkeiten (Reduktion von Komplexität)
- Aufgaben mit Realitätsbezug zum Abschluss (Anwendungen der Mathematik auf die Umwelt)
- die Schülerinnen und Schüler vollziehen vorgegebene Rechenwege nach
- die Lehrperson kontrolliert und korrigiert

Prinzip der zunehmenden Mathematisierung

Mathematik sollte aber nicht nach dem Prinzip der fortschreitenden Komplizierung gelernt werden, sondern – wie das Autofahren – in hinreichend komplexen und herausfordernden Situationen. Hinreichend komplex heißt nicht in 'voller Komplexität', und herausfordernd bedeutet nicht ‚überfordernd'.

Natürlich fährt man in den ersten Fahrstunden nicht bei Nacht oder auf der Autobahn, sondern über vergleichsweise ruhige Straßen. Auch verlangt man nicht sofort die Ausführung aller möglichen Aktionen und auch nicht schon in den ersten Fahrstunden das Rückwärts-Einparken. Aber schon in der ersten Stunde wird im echten Straßenverkehr gefahren, und viele Anforderungen stürmen dabei auf den Fahrschüler ein.

Er muss lernen, mit dieser (aus der Sicht des Könners) überschaubaren Komplexität fertig zu werden. Das wird dem Lernenden nicht abgenommen. Selbstverständlich wird er dabei nicht allein gelassen: Der Fahrlehrer stellt ihm gewisse Aufgaben oder gibt ihm Tipps, und ist schließlich gegebenenfalls in der Lage einzugreifen.

Ganz in diesem Sinne favorisiert Treffers (1983) das Prinzip der *fortschreitenden Mathematisierung*, das er idealtypisch wie folgt beschreibt:

- 'ganzheitliche' Behandlung (Auseinandersetzung mit überschaubarer Komplexität)
- durchgehende Nutzung von Aufgaben mit Realitätsbezug (Brücke zwischen Schüler & Mathematik)
- die Schüler entwickeln zunehmend effizientere und elegantere Rechenwege
- die Lehrperson orientiert und regt an (zu Reflexion & zu Kommunikation/Kooperation)

Die Einführung in die schriftliche Multiplikation gemäß dieses Prinzips kann z.B. wie folgt gestaltet werden:

- die Lehrperson stellt den Schülern komplexer angelegte Aufgaben und ermutigt sie dazu, diese mit ihren eigenen Methoden zu lösen.
- die Schülerinnen und Schüler werden dazu angeregt, ihre Vorgehensweisen zu zeigen und die Vorgehensweisen anderer Schüler kennen zu lernen (Vorsicht: nicht überstrapazieren!).
- die Lehrperson bittet die Schüler, ausgewählte fremde Rechenwege an einigen Aufgaben nachzuvollziehen.
- die Schülerinnen und Schüler werden gebeten, sich bei vorgegebenen Aufgaben bewusst für bestimmte (individuell durchaus unterschiedliche) Vorgehensweisen zu entscheiden.

Untersuchungsergebnisse und Konsequenzen

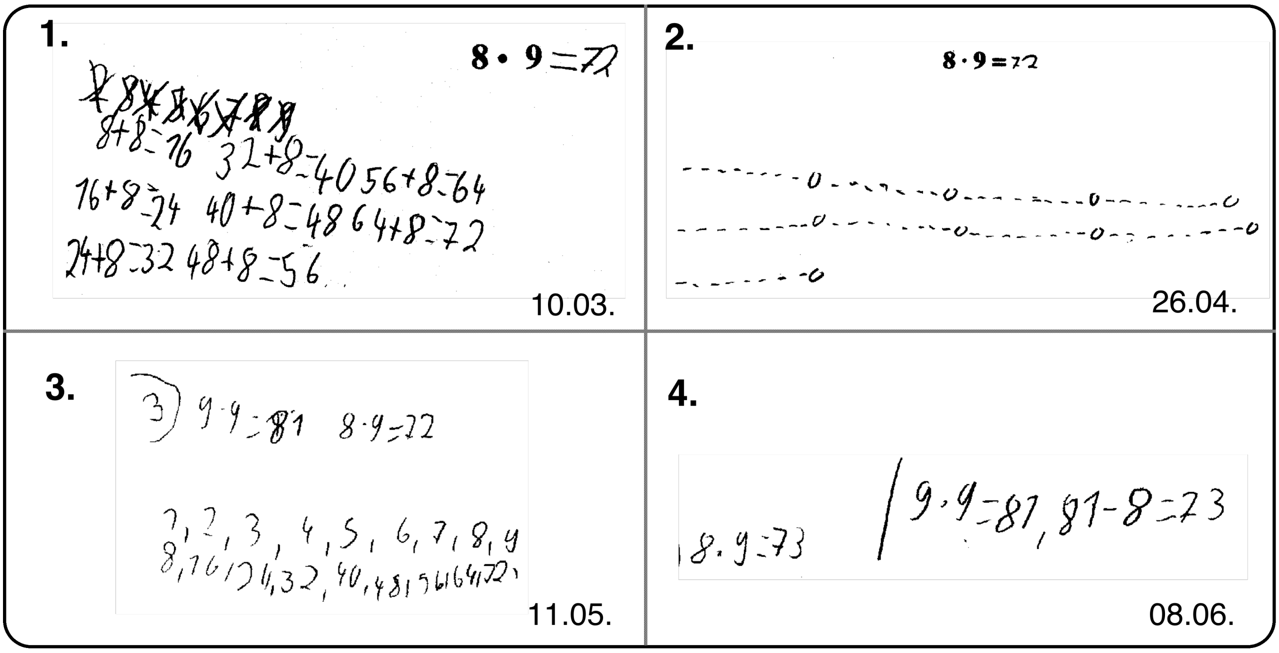
Untersuchungen, die die 'fortschreitende Mathematisierung' mit der o. a. Schritt für Schritt-Methode verglichen haben, ergaben etwa gleiche Leistungen bei schriftlichen Algorithmen. Bessere Ergebnisse erzielte die 'fortschreitende Mathematisierung' beim Kopfrechnen und beim halbschriftlichem Rechnen, bei schwierigen Anforderungen (z. B. Rechnen mit der 0) und bei Aufgaben mit Realitätsbezug. Dieser Befund stützt – neben anderen Erkenntnissen – die Forderung, dass sich der Unterricht am Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung orientieren sollte. Das bedeutet …

- die Schülerinnen und Schüler dazu zu ermutigen, bei der Bearbeitung von Kontextaufgaben oder anderen für sie sinnvollen Aufgaben ihr (Vor-)Wissen zu zeigen; die informellen Schülerlösungen bilden den Ausgangspunkt des Unterrichts (das ‚*Individuelle*', wie mache **ich** es?).
- die Schülerinnen und Schüler dazu anzuregen, über ihre eigenen Vorgehensweisen zu reflektieren und diese mit anderen zu vergleichen (das ‚*Soziale*', wie machst **du** es?).
- die Schülerinnen und Schüler dabei zu unterstützen, zunehmend elegantere, effizientere und weniger fehleranfällige Rechenmethoden zu erwerben (das ‚*Reguläre*': wie machen **wir** es?

Achims Lernprozess

So nahm der Zweitklässler Achim an einem Unterricht teil, in dem das Auswendiglernen der Einmaleinsaufgaben nicht verfrüht erfolgte, sondern viel Wert darauf gelegt wurde, dass die Kinder das Einmalseins im Sinne des Prinzips der Fortschreitenden Mathematisierung kennen lernten. Es ging im Unterricht also nicht um verfrühtes Auswendiglernen, sondern um den Ausbau eines Beziehungsnetzes von Einmaleinsaufgaben (vgl. auch das Material ‚Einmaleins richtig üben' in Haus 3).

In Interviews wurde Achim in regelmäßigem Abstand die Aufgabe ‚8·9' gestellt, und er wurde befragt, wie er diese Aufgabe löste (vgl. Eigenproduktionen, Modul 5.1). Schaut man sich seine Vorgehensweisen genauer an, so wird deutlich, welche Lernfortschritte er macht und wie er sich auf seinem individuellen Weg zur Beherrschung und zum Verstehen des Einmaleins befindet.



Im *März* ermittelte er zur Lösung von ‚8·9' zunächst zählend das Resultat von ‚8+8', schrieb über den entsprechenden Zahlensatz eine ‚2' und strich diese durch, um sich zu merken, dass er die ‚8' zweimal berücksichtigt hatte. Dann schrieb er ‚16+8=' unter die erste Gleichung, zählte von ‚16' aus weiter, notierte das Resultat, vermerkte neben der durchgestrichenen ‚2' eine ‚3' und strich diese ebenfalls durch. Diese ‚Prozedur' wiederholte er, bis er das Endergebnis ‚72' erhalten hatte.

Im *April* zeichnete er kleine *Striche*, von denen jeweils acht durch nicht mitzuzählende Kreise voneinander abgetrennt wurden. Interessanter Weise ermittelte er das *richtige Endergebnis*, obwohl der zweite ‚Achter' lediglich aus sieben Strichen bestand; er zählte jedoch den zweiten Kreis mit, was wohl darauf zurückzuführen ist, dass ihm die korrekte Lösung von ‚8+8' bereits bekannt war.

Im *Mai* äußerte er auf Anhieb, dass er das Ergebnis zwar nicht kenne, aber wisse, dass ‚9·9=81' sei. Die Frage, ob er damit auch das Ergebnis von ‚8·9' ermitteln könne, verneinte er. Stattdessen notierte er die Achterreihe bis zum neunten Glied, wobei er die Ergebnisse jeweils zählend oder addierend erhielt. Außerdem verwendete er Merkzahlen, die er über das jeweilige Zwischenresultat schrieb und die die Anzahl der bereits berücksichtigten Achten repräsentierten. Zum Schluss vermerkte er den Zahlensatz ‚8·9=72' neben der Gleichung ‚9·9=81'. Achim hatte während des Interviews anscheinend eine vage Idee, dass eine Beziehung zwischen den beiden Aufgaben bestehen müsste; er benutzte diesen Zusammenhang nicht zur Ermittlung des Ergebnisses, war allerdings am Schluss in der Lage, ihn zu verbalisieren: „8·9=72, weil es ‚9' weniger sind als 81."

Beim letzten Interview im *Juni* gab er direkt die Lösung ‚8·9=73' an und notierte *anschließend* hinter einem senkrechten Strich seinen Rechenweg: ‚9·9' sei ‚81'; davon müssten noch ‚8' subtrahiert werden. Zwar erhielt er hier erstmals nicht die korrekte Lösung, doch zeugt dieses Vorgehen von seinem wachsenden Bemühen, geschicktere Rechenwege einzuschlagen, und ist somit positiv zu beurteilen. Nach den Sommerferien (ohne Abb.) hatte er dann die Aufgabe 8·9 nicht nur gedächtnismäßig verfügbar, sondern war auch in der Lage, diese Aufgabe zu anderen Aufgaben und zu anderen als der symbolischen Darstellung in Beziehung zu setzen.

Informationen dazu, was wie im Unterricht von Achims Klasse gemacht wurde, finden Sie im Informationsmaterial zu Eigenproduktionen im Haus 5.

Literatur

Spiegel, Hartmut & Christoph Selter (2003): Kinder & Mathematik – Was Eltern wissen sollten. Seelze: Kallmeyer.

Treffers, Adri (1983): Fortschreitende Schematisierung. In: Mathematiklehren. H. 1, S. 16–20.