



## Fermi-Aufgaben: Nicht nur Frage-Rechnung-Antwort!

- 6** Fredericks Mutter besorgt im Baumarkt Fußleisten. Sie findet einige Sonderangebote in der Restekiste. Lege zwei Leisten aneinander. Wie lang sind sie zusammen?
- Gib fünf Beispiele an.
  - Es gibt insgesamt neun verschiedene Längen. Findest du sie alle?



Abb.1: Aufgabe aus Welt der Zahl (2004), 3. Schuljahr

Wie in der Abbildung in der Aufgabe 6a findet sich in vielen Mathematikbüchern vorgegebene Rechenoperationen - oft auch nur eine bestimmte - in eine vermeintliche Alltagssituation „verpackt“. Der Kontext der Sachaufgabe ist also austauschbar und die Bearbeitung folgt in der Regel einem festgelegten und stereotypen Frage-Rechnung-Antwort-Muster. Daher ist es nicht verwunderlich, dass die Motivation, das Sachproblem zu lösen, sehr gering ist.

### **Doch was sind gute Sachaufgaben?**

Im Folgenden wird die so genannten **Fermi-Aufgaben als ein Repräsentant guter Sachaufgaben** näher erläutern, indem zunächst auf das Aufgabenformat selbst, anschließend auf den didaktischen Hintergrund guter Textaufgaben und schließlich auf die Chancen von Fermi-Aufgaben hinsichtlich der Förderung **prozessbezogener Kompetenzen** eingegangen wird.

### **1. Was ist eine Fermi-Aufgabe?**

Das Aufgabenformat „Fermi-Aufgabe“ geht auf den Physiker und Nobelpreisträger Enrico Fermi (1901-1954) zurück, der seinen Studenten die Aufgabe stellte, „Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“. Die Besonderheit dieses Aufgabentyps besteht darin, dass keine exakte Lösung verlangt, sondern **nur ein plausibles oder unplausibles Ergebnis möglich** ist.

Eine Fermi-Aufgabe für den Primarbereich ist zum Beispiel die Frage: „**Wie viele Autos stehen in einem 3 km langen Stau?**“ ( vgl. Peter-Koop 2003, S. 121). Hierbei handelt es sich um eine **offene, realitätsbezogene** und **herausfordernde** Aufgabe, die Grundschul Kinder zum **Schätzen, Überschlagen, Messen, Recherchieren von Daten**, dem Finden **verschiedener Lösungswege** und der **Interpretation und Bewertung der** erlangten **Ergebnisse** motiviert. Im Gegensatz zu den meisten traditionellen Sachaufgaben steht das **mathematische Handeln an einem authenti-**



**schen Sachproblem** im Mittelpunkt. Dadurch weckt dieses Aufgabenformat aus sich heraus das Interesse der Kinder, sodass sie sich mit dem Sachproblem identifizieren können – sofern sie selbst schon mal im Stau standen.

Im Gegensatz zu stereotypen Textaufgaben werden in einer Fermi-Aufgabe nur **wenige Zahlen** verwendet, damit die Schülerinnen und Schüler nicht zu vorschnellem Rechnen verleitet werden. Da Fermi-Aufgaben einen großen Gesprächs- und Diskussionsanlass bieten, ist es sinnvoll, die Kinder in **Kleingruppen** arbeiten zu lassen. Die Gruppenergebnisse können anschließend im Klassenplenum präsentiert und erläutert werden.

## 2. Wieso handelt es sich bei Fermi-Aufgaben aus mathematischer und didaktischer Sicht um gute Aufgaben?

Diese Frage wird im Folgenden anhand der drei „**Prinzipien des Sachrechnens**“ nach Winter (vgl. Winter 2003) – Sachrechnen als Lernstoff, Sachrechnen als Lernprinzip, Sachrechnen als Lernziel – beantwortet.

Das erste Prinzip „**Sachrechnen als Lernstoff**“ bedeutet, dass Schülerinnen und Schüler durch die Bearbeitung der Sachaufgabe Wissen über Größen aufbauen sowie Fähigkeiten und Fertigkeiten im Umgang mit Größen erwerben, indem sie, wie es bei Fermi-Aufgaben der Fall ist, Daten mittels Schätzungen oder Recherchen gewinnen, mit Maßen und Einheiten (bei diesem konkreten Beispiel: km-m-cm) umgehen müssen, Größenvorstellungen erwerben (Wie groß ist ein Auto?) und gewonnene Daten sortieren.

Mit „**Sachrechnen als Lernprinzip**“ ist gemeint, dass ein realitätsnaher Bezug zum Alltag in einer Sachaufgabe genutzt wird, um den Schülerinnen und Schülern das Erlernen von mathematischen Begriffen und Operationen (bei dem konkreten Beispiel: Multiplikation großer Zahlen) zu erleichtern. Besonders Fermi-Aufgaben entsprechen diesem Prinzip, weil sie durch ihre Struktur dem Schüler ermöglichen, wichtige Grundvorstellungen mathematischer Begriffe, wie zum Beispiel „Durchschnitt“ oder „Mittelwert“, zu entwickeln.

Auch das dritte Prinzip „**Sachrechnen als Lernziel**“ wird in besonderer Weise durch Fermi-Aufgaben angesprochen, weil ein bewusstes und kritisches Erschließen der Umwelt und Lebenswirklichkeit mit Hilfe der Authentizität des Sachproblems angeregt wird (Kinder entwickeln eine Vorstellung darüber wie lang 3 km wirklich sind). Dadurch können Fermi-Aufgaben einen wichtigen Beitrag zur Bewältigung möglicher Alltagsprobleme liefern.

## 3. Kompetenzentwicklung durch Fermi-Aufgaben!

Wie schon oben erwähnt, werden sinnvoll gestellte Fermi-Aufgaben, im Gegensatz zu den traditionellen Sachaufgaben, den Forderungen der Bildungsstandards Mathematik im Primarbereich (vgl. Walther et al 2009, S. 16-41) besser gerecht. Diese verlangen nämlich neben der Entwicklung inhaltsbezogener Kompetenzen auch die Förderung der folgenden **prozessbezogenen Kompetenzen**, die im Folgenden näher erläutert werden.

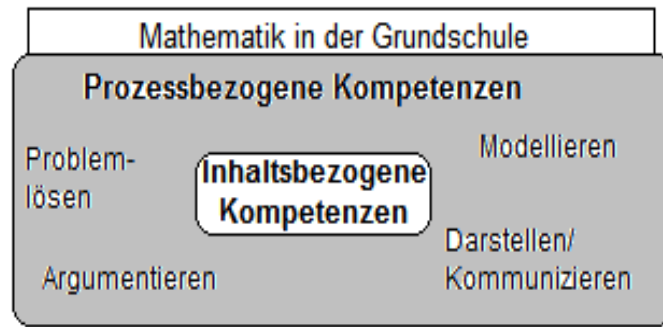


Abb. 2: Überblick über die prozessbezogenen Kompetenzen, modifiziert nach Vorlage (aus: Walther et al. 2009, S. 19)

### Modellieren:

Beim Lösen von Fermi-Aufgaben laufen vor allem **Modellierungsprozesse auf der Basis individueller Erfahrungen und Alltagswissen** der Kinder ab. In diesem Modellierungskreislauf soll zunächst das Sachproblem in eine mathematische Sprache übersetzt und gelöst werden, bevor das Ergebnis anschließend wieder auf die Sachsituation bezogen und auf Plausibilität hin geprüft wird. In Abbildung 3 ist der Modellierungskreislauf am Beispiel der Stau-Aufgabe dargestellt:

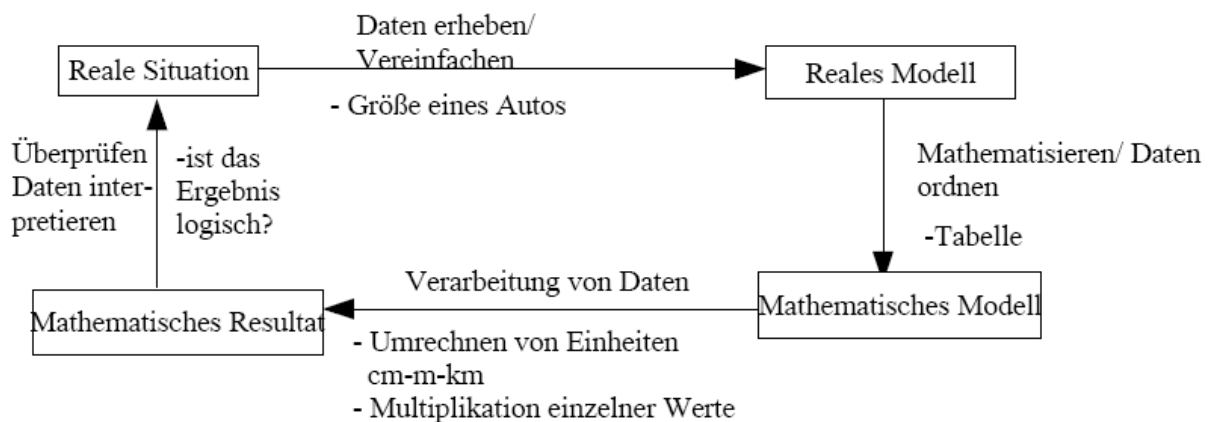


Abb.3: Modellierungskreislauf am Beispiel der „Stau-Aufgabe“, modifiziert nach Vorlage aus (Peter-Koop 2003, S. 112)

Die einzelnen Phasen des Modellierens werden in der Regel mehrmals durchlaufen, weil mögliche Irrwege und falsche Hypothesen am Ende eines Kreislaufes von den Schülerinnen und Schülern erkannt werden und so der Lösungsweg überdacht wird. Beim nochmaligen Durchlaufen können die Kinder dann neue Modellierungsversuche durchführen, bis sie schließlich zu einer plausiblen Lösung des Problems gelangen.

Innerhalb dieses Modellierungsprozesses werden folgende weitere prozessbezogene Kompetenzen gefordert und gefördert:



## Problemlösen und kreativ sein:

Fermi-Aufgaben ermöglichen durch ihre Offenheit das **Finden verschiedener Wege und Strategien auf unterschiedlichem Niveau**. Um diesen Aspekt zu veranschaulichen sollen die folgenden zwei Schülerdokumente zu der Aufgabe „Wie viele Autos stehen in einem 3 km langen Stau“ aus einem dritten Schuljahr herangezogen werden.

Mercedes 300 Autos.  
 VW Golf 11.316 Autos.  
 Erwa 400 Autos.

4,263	4,53
Bali	403 cm
	436 cm
4,1736	340 cm
Auto	338 cm
	121
3m99	160 cm
golf	

4 Autos sind 16m.  
 Ein Auto ist ungefähr 4 m.

2100 + 150 =

160

800 · 4 = 3200 m  
 600 · 4 = 2400 m  
 750 · 4 = 3000 m  
 700 · 4 = 2800 m  
 3 · 750 = 2250

2250 Autos 3 Straßen

Wah ein Auto ist 4m lang und 750 Autos auf 3 Straßen sind 2250 Autos.

Abb. 4: Schülerdokument aus: ( Peter-Koop 2003, S. 121)

Mercedes Benz 4,65m  
 VW Golf 4,50m  
 Ferrari 3,38m  
 Peugeot 2,50m  
 Honda 4,00m  
 Motorwagen 2,90m

4,65  
 + 4,50  
 + 3,38  
 + 2,50  
 + 4,00  
 + 2,90  
 -----  
 26,93m

länge von 5 Autos

2 · 26,93 =

2 · 30,80 = 67,80m das ist die länge von 10 Autos

50 · 60 = 3000

5 Autos 30 m  
 10 Autos 60 m  
 15 Autos 90 m  
 20 Autos 120 m  
 25 Autos 150 m  
 30 Autos 180 m  
 35 Autos 210 m  
 40 Autos 240 m

45 Autos 270 m  
 50 Autos 300 m

10 · 50 = 500 Autos = 3000 m

500 · 2 = 1000 Autos weil die Autos an 2 spurig ist.  
 1000 Autos stehen im Stau.

Abb. 5: Schülerdokument aus (Peter-Koop 2003, S. 123)

Bei beiden Dokumenten erkennt man, dass die Kinder zunächst einmal konkrete Daten für die Länge verschiedenster Autos gemessen und notiert haben. Anschließend hat eine Gruppe (s. Abb. 4) die Länge von vier und die andere Gruppe (s. Abb. 5) die Länge von fünf Autos additiv bestimmt. Im ersten Dokument (s. Abb. 4) erkennt man im weiteren Verlauf des Lösungsprozesses, dass die Kinder angefangen haben, erst spontan zu probieren, dann immer systematischer zu überlegen, welche Zahl sie mit vier (Länge eines Autos) multiplizieren müssen, um auf drei Kilometer bzw. 3000 m zu kommen.

Im Gegensatz zu dieser Strategie des „**systematischen Probierens**“ machen sich die Schülerinnen und Schüler, die das zweite Dokument (vgl. Abb. 5) erstellt haben, **proportionale Beziehungen** zu Nutze, indem sie die Anzahl der Autos zunächst immer um fünf erhöhen und deren Länge bestimmen. Mit Hilfe der Aufgabe „50 Autos = 270 m“ gelingt es ihnen schließlich eine plausible Anzahl der Autos in einem 3 km langen Stau zu bestimmen.

Diese zwei Schülerdokumente zeigen eindrucksvoll, mit was für unterschiedlichen Strategien Grundschulkinder eine Fermi-Aufgabe lösen können und welches Potential somit in diesem Aufgabenformat steckt. Schließlich müssen die Kinder entscheiden, welche Informationen sie überhaupt benötigen, welche Quellen (konkrete Objekte, Bücher, Internet) zur Lösung des Problems hilfreich sein könnten und mit welcher Strategie ein Lösungsweg gesucht wird.



### **Argumentieren:**

Wie schon erwähnt, ist es sinnvoll, dass Fermi-Aufgaben in Kleingruppen gelöst werden. Dadurch wird in besonderer Weise die prozessbezogene Kompetenz „Argumentieren“ gefördert. Darunter versteht man, dass die einzelnen Kinder ihren Gruppenmitgliedern ihren **eigenen Lösungsweg erklären** und lernen, diesen in Diskussionen zu **vertreten** sowie zu **begründen** (vgl. hierzu auch auf der KIRA-Website ([www.kira.tu-dortmund.de](http://www.kira.tu-dortmund.de)): „Wie viele Kühe bräuchte man, um die ganze Schule eine Woche lang mit Milch zu versorgen?“).

Auch durch die Tatsache, dass die **Gruppenergebnisse** am Ende dem Klassenplenum **vorgelegt** und **auf Plausibilität überprüft** werden, schult die Fähigkeit, Lösungen kritisch zu reflektieren, zu hinterfragen sowie diese Kritik auch angemessen zu formulieren.

### **Darstellen und Kommunizieren:**

Durch die gemeinsame Arbeit an einer Fermi-Aufgabe wird die **Zusammenarbeit und Interaktion** unter den einzelnen Schülerinnen und Schülern einer Gruppe gefördert. Dadurch, dass sich die Kinder bei Fermi-Aufgaben mit den verschiedenen Lösungswegen ihrer Gruppenmitglieder auseinandersetzen müssen, werden diese in ihrem mathematischen Lernprozess unterstützt. So können Kinder begonnene **Gedanken anderer aufnehmen und weiterführen**. Das Lernen gestaltet sich demnach als ein sozialer Prozess.

Die Kompetenz „Darstellen“ besitzt bei den Fermi-Aufgaben ebenfalls einen besonderen Stellenwert, weil die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungswege und **Ergebnisse** zum einen **übersichtlich** und verständlich **dokumentieren** müssen (Tabelle, Diagramm usw.) und zum anderen die verschiedenen Darstellungsweisen im Hinblick auf ihren Anschaulichkeitsgrad und Nutzen vergleichen sollen.

### **Was sind nun „gute Sachaufgaben“?**

Gute Sachaufgaben sind herausfordernde Aufgabenformate, die zum Fragen, Gedanken weiterführen, Vermuten anregen, sowohl inhaltsbezogene als auch prozessbezogene Kompetenzen fördern und reichhaltige Lösungsmöglichkeiten zulassen. Allerdings ist nicht jede Fermi-Aufgabe auch immer eine gute Aufgabe. Daher sollte jede Lehrperson auch dieses Aufgabenformat kritisch hinterfragen und nur solche Fermi-Aufgaben für den Unterricht auswählen, die die oben genannten Kriterien erfüllen. Mit Hilfe ausgewählter Aufgaben kann erreicht werden, dass bei den Grundschulkindern eine positive Einstellung zum Fach Mathematik aufgebaut wird.



### **Literaturverzeichnis:**

1. Heckt, D. H. (2009): Aufgaben rechnen. In: Grundschule, Magazin für Aus- und Weiterbildung. H.6.
2. Kaufmann, S. (2006): Umgang mit unvollständigen Aufgaben. In: Die Grundschul Zeitschrift. H.191, S. 16-22.
3. Peter-Koop, A. (2003): „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?“ – Modellbildungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Problemen in Kleingruppen. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hg.): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule, Offenburg: Mildenerger, S.111-130.
4. Walther, G. et al. (2009): Die Bildungsstandards Mathematik. In G. Walther et al. (Hg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret, Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 16-41.
5. Winter, H. (2003): Sachrechnen in der Grundschule, 6. Auflage. Berlin: Cornelsen Scriptor.

### **Abbildungsverzeichnis:**

Rinkens, H.-D./Hönisch, K. [Hrsg.] (2004): Welt der Zahl, 3. Schuljahr. Braunschweig: Schroedel, S. 93